

Перетяцько Ю.Г., Агєєнко С.Б., Ляшенко І.Ю.

Харківський національний університет будівництва та архітектури

(вул. Сумська, 40, Харків, 61002, Україна; e-mail: jura_51@ukr.net, summery_irina@ukr.net;
orcid.org/0000-0002-8005-8776, orcid.org/0000-0002-6093-0694, orcid.org/0000-0001-6444-8515)

ВПЛИВ ВИДУ ОПОРНИХ РЕАКЦІЙ НА ЗМИНАННЯ ДЕРЕВ'ЯНОЇ БАЛКИ НА ОПОРАХ

Робота присвячена дослідженню характеру розподілу нормальних напружень поперек волокон на опорних ділянках дерев'яних балок з прямокутним поперечним перерізом. Розроблено методику аналітичного визначення дотичних та поперечних нормальних напружень в балці шляхом безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги плоскої задачі теорії пружності. Розглянуто два випадки розподілу опорних реакцій балки на двох опорах: рівномірний та у вигляді трикутників по довжині опорних ділянок балки. Наведено результати числових розрахунків. Показано, що окрім виконання умов міцності балки за максимальними нормальними напруженнями вздовж волокон та дотичними на опорах по формулі Журавського, необхідно виконання умови міцності опорної частини балки на зминання поперек волокон. Остання залежить від випадків розподілу опорних реакцій балки.

Ключові слова: дерев'яна балка, прямокутний поперечний переріз, визначення нормальних та дотичних напружень, рівняння рівноваги плоскої задачі теорії пружності, види розподілу опорних реакцій балки, зминання балки на опори поперек волокон.

Вступ. У більшості видань з навчальної та навчально-методичної літератури у розрахунках дерев'яних балок є відсутні питання розрахунку їх опорних ділянок [1-6]. Інші [7-10] відповідно до нормативних документів [11-13] при перевірці умови міцності за змінанням опорної частини балки (рис. 1), що має вигляд:

$$\sigma_{зм,90} = \frac{V_B}{A_{зм}} = \frac{V_B}{b_{0.Б.} \cdot l_{зм}} = \frac{V_B}{b_{0.Б.} \cdot b} \leq R_{зм,90,*} \quad (1)$$

вважають, що напруження зминання поперек волокон $\sigma_{зм,90}$ розподіляються рівномірно по площі взаємного контакту балки з опорою (рис. 1).

При цьому згідно [11, 12] розрахунковий опір місцевому зминанню поперек волокон дерев'яної підкладки (рис. 1) визначають за формулою:

$$R_{зм,90} = R_{с,90} \cdot \left(1 + \frac{8}{l_{зм} + 1,2}\right) \quad (2)$$

де $R_{с,90}$ – розрахунковий опір базової деревини [14] стиску (зминанню) по всій площі поперек волокон; $R_{зм,90,*}$ – розрахункове значення розрахункового опору $R_{зм,90}$, що обчислюється за формулою [14]:

$$R_{зм,90} = R_{зм,90} \cdot m_*, \quad (3)$$

m_* - узагальнений коефіцієнт умов праці;

$$m_* = m_{\Pi} \cdot m_{В} \cdot m_{Т} \cdot m_{Д} \cdot m_{Н} \cdot m_{С} \cdot m_{Ш} \cdot m_{ГН} \cdot m_0 \cdot m_a, \quad (4)$$

Значення коефіцієнтів m_i наведені в [11, 12].

Мета роботи. Оскільки величина напружень $\sigma_{зм,90}$ залежить від значення вертикальної опорної реакції балки V_B , а величина опору $R_{зм,90,*}$ деревини підкладки є фіксованою і незначною у порівнянні із зминанням вздовж волокон, аналітично дослідимо характер розподілу нормальних напружень поперек волокон $\sigma_{с,90}$ на опорних ділянках дерев'яних балок з прямокутним поперечним перерізом.

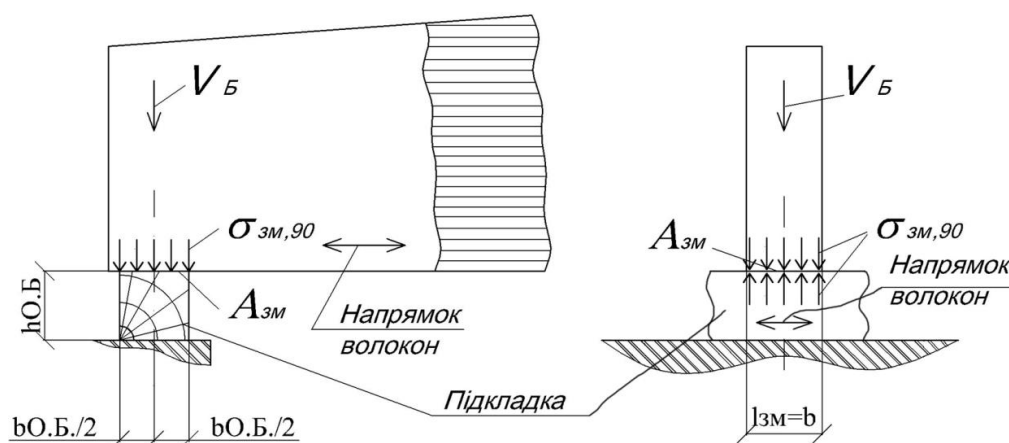


Рис. 1 Розрахункова схема опорної частини балки відповідно до норм.

Зміст роботи та результати дослідження. Зберігаючи умову про рівномірний розподіл напружень зминання поперек волокон $\sigma_{зм,90}$ по площі взаємного контакту балки з опорною підкладкою, визначимо значення та характер розподілу напружень $\sigma_{зм,90}$ на опорних ділянках балки, зображеної на рис. 2 при наступних вихідних даних: $l=500$ см, $a=20$ см, $b \times h=9,5 \times 50$ см. Матеріал балки – сосна 2-го сорту. Навантаження на балку $q=17,7$ кН/м задовольняє умовам її міцності за максимальними нормальними напруженнями $\sigma_{max}=12,9$ МПа $< R_{II}^*=13$ МПа та за максимальними дотичними напруженнями, обчисленими за формулою Д.І. Журавського.

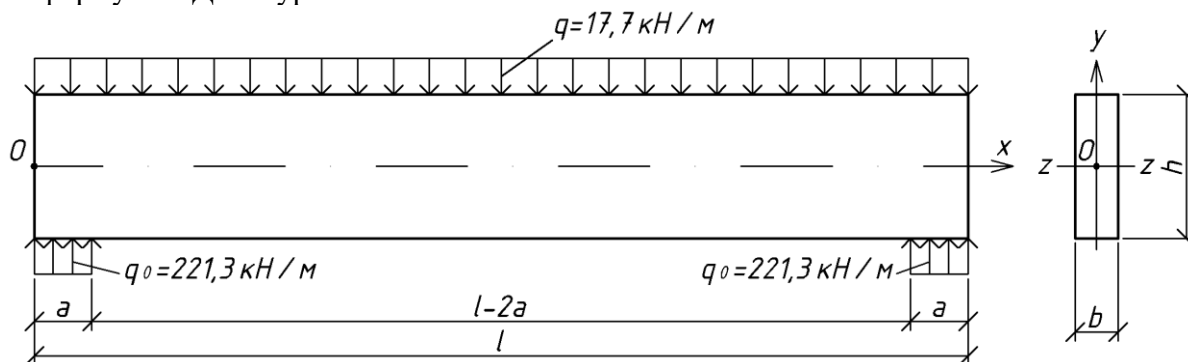


Рис. 2. Дерев'яна балка з рівномірно розподіленими опорними реакціями.

Традиційно сталеві [15] та дерев'яні [1-10] балки розраховують у геометрично лінійній постановці з використанням гіпотези Кірхгофа плоских перерізів та гіпотези про не натискання волокнами одне на одне в поперечному напрямку (волокна при згині лише розтягуються-стискаються). Як наслідок, усі компоненти напруженого стану балки є функціями лише однієї координати x (рис. 2), тобто задача про згинання балки переходить з двовірної (плоска задача теорії пружності) в одномірну. При цьому, незалежно від матеріалу балки, поздовжні нормальні напруження σ_x при згині визначаються за відомою формулою

$$\sigma_x = -\frac{M(x) \cdot y}{J_z}, \quad \text{де} \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}; \quad J_z = \frac{bh^3}{12}. \quad (5)$$

Знаючи залежність згинаючого моменту M від поздовжньої координати x : $M=M(x)$, за виразом (5) маємо функцію розподілу напружень $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$ як по довжині балки, так і по висоті її поперечних перерізів. Строго кажучи, згідно прийнятої другої гіпотези ($\sigma_y=0$) дотичні напруження τ_{xy} також повинні бути відсутніми $\tau_{xy}=0$. Але їх традиційно визначають за формулою Д.І. Журавського, яку він отримав з умови зрівноваження приросту напружень σ_x по координаті x . Але, оскільки $\tau_{xy} \neq 0$, то очевидно, що і $\sigma_y \neq 0$. Як правило, останні

напруження є незначними за величиною і для таких конструкційних матеріалів, як сталь, ними нехтують, як це і передбачено гіпотезою про не надавлювання волокнами одне на одне в напрямку координати y . Але для дерев'яних конструкцій, що мають незначну міцність поперек волокон, напруження σ_y необхідно обов'язково обчислювати.

Для визначення напружень τ_{xy} і σ_y , на відміну від підходу Д.І. Журавського, використовуємо рівняння рівноваги плоскої задачі теорії пружності:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Із першого рівняння (1) маємо:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}. \quad (7)$$

Інтегруємо по y :

$$\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot dy = -\int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dy + \Phi(x), \quad (8)$$

$$\text{звідки} \quad \tau_{xy} = -\int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dy + \Phi(x), \quad (9)$$

де $\Phi(x)$ – довільна функція, що залежить від координати x .

Взявши похідну по x від виразу (5) та підставивши в (9), після інтегрування, отримуємо:

$$\tau_{xy} = \frac{y^2}{2 \cdot J_z} \cdot \frac{dM(x)}{dx} + \Phi(x). \quad (10)$$

Довільну функцію $\Phi(x)$ знаходимо з використанням умови:

$$\text{при} \quad y = \pm \frac{h}{2}; \quad \tau_{xy} \left(\pm \frac{h}{2} \right) = 0. \quad (11)$$

З урахуванням (11) маємо остаточний вираз для дотичних напружень τ_{xy} :

$$\tau_{xy} = -\frac{dM(x)}{dx} \cdot \frac{1}{2 \cdot J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (12)$$

З другого рівняння (6) маємо:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}. \quad (13)$$

Інтегруємо по y :

$$\int \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot dy = -\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dy + \Phi_1(x), \quad (14)$$

$$\text{звідки} \quad \sigma_y = -\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dy + \Phi_1(x), \quad (15)$$

де $\Phi_1(x)$ – довільна функція, що залежить від координати x .

Взявши похідну по x від виразу (12) та підставивши в (15), після інтегрування, отримуємо:

$$\sigma_y = \frac{d^2 M(x)}{dx^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot J_z} \cdot \left[\frac{h^2}{4} \cdot y - \frac{y^3}{3} \right] + \Phi_1(x). \quad (16)$$

Довільну функцію $\Phi_1(x)$ знаходимо з використанням умови:

$$\text{при } y = \frac{h}{2}; \quad \sigma_y \left(\frac{h}{2} \right) = -\frac{q}{b}. \quad (17)$$

З урахуванням (17) маємо остаточний вираз для дотичних напружень σ_y :

$$\sigma_y = \frac{d^2 M(x)}{dx^2} \cdot \left[\frac{1}{2 \cdot J_z} \cdot \left(\frac{h^2}{4} \cdot y - \frac{y^3}{3} \right) - \frac{1}{2 \cdot b} \right] - \frac{q}{b}. \quad (18)$$

Для балки за рис. 2 по її довжині маємо три ділянки з відповідними внутрішніми зусиллями:

$$M_1(x) = (q_0 - q) \cdot \frac{x^2}{2};$$

$$\frac{dM_1(x)}{dx} = Q_1(x) = (q_0 - q) \cdot x; \quad 0 \leq x \leq a;$$

$$\frac{d^2 M_1(x)}{dx^2} = \frac{dQ_1(x)}{dx} = q_0 - q; \quad (19)$$

$$M_2(x) = -q \cdot \frac{x^2}{2} + q_0 \cdot a \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right);$$

$$\frac{dM_2(x)}{dx} = Q_2(x) = q_0 \cdot a - q \cdot x; \quad a \leq x \leq l - a;$$

$$\frac{d^2 M_2(x)}{dx^2} = \frac{dQ_2(x)}{dx} = -q; \quad (20)$$

$$M_3(x) = -q \cdot \frac{x^2}{2} + q_0 \cdot a \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right) + \frac{q_0}{2} \cdot (x - l + a)^2;$$

$$\frac{dM_3(x)}{dx} = Q_3(x) = q_0 \cdot a - q \cdot x + q_0 \cdot [x - (l + a)]; \quad l - a \leq x \leq l;$$

$$\frac{d^2 M_3(x)}{dx^2} = \frac{dQ_3(x)}{dx} = q_0 - q. \quad (21)$$

З умови рівноваги балки в цілому (рис. 2) маємо: $q_0 = (q \cdot l) / (2 \cdot a)$. (22)

Приводимо результати чисельного розрахунку дерев'яної балки за рис. 1 при зазначених вище вихідних даних.

Результати розрахунку представлені на рис. 3

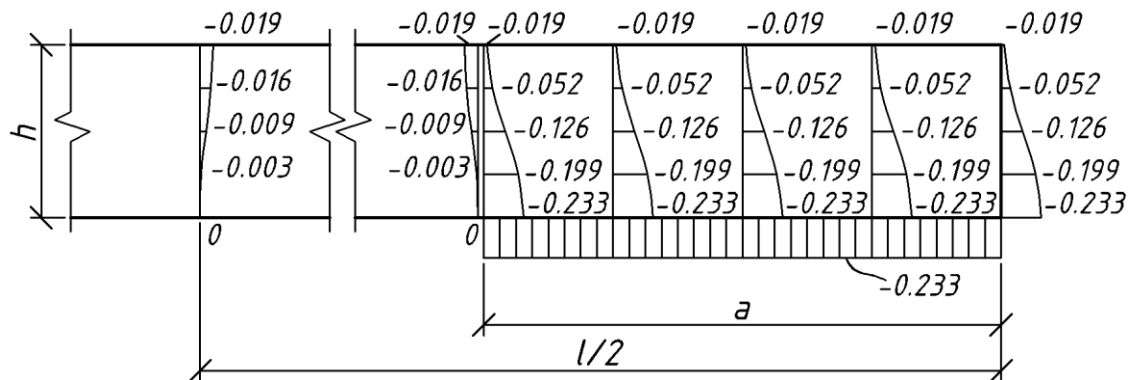


Рис. 3. Розподіл напружень σ_y по площі опори (ділянка довжиною a) та між опорами.

З рис.1, рис. 3 бачимо, що на ділянках $0 \leq x \leq a$; $a \leq x \leq l-a$ та $l-a \leq x \leq l$ епюри напружень σ_y в межах цих ділянок є однаковими. Змінання деревини балки на опорі не відбувається, оскільки виконується умова міцності за зім'яттям:

$$\sigma_y = R_{зм,90} = 0,233 \text{ кН/см}^2 < R_{зм,90,*} = 0,3 \text{ кН/см}^2.$$

Очевидно, що в реальності завдяки прогинанню балки під навантаженням реактивний тиск на опорних ділянках a балки не буде рівномірним, і, навіть одного знаку (стиск), а в залежності від різних факторів (наприклад, жорсткості балки на згин) може мати вигляд трапеції (стиск), або в граничному випадку стиску по всій довжині ділянки a – трикутний вигляд (рис. 4), або навіть випадок з відривом кінцевої частини балки від площі взаємного контакту з опорою.

Як і в попередньому випадку, визначимо значення та характер розподілу напружень $\sigma_{зм,90}$ на опорних ділянках балки, зображеної на рис. 4 при вихідних даних, прийнятих раніше.

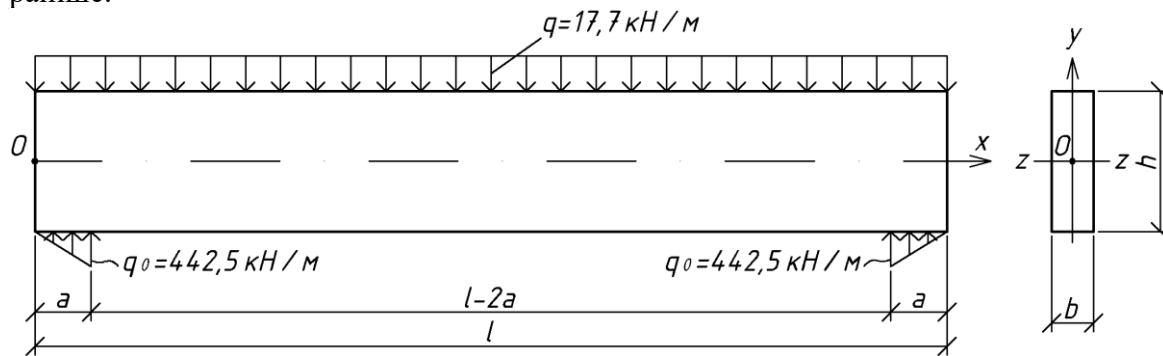


Рис. 4. Дерев'яна балка з опорними реакціями, розподіленими по трикутнику.

Напруження σ_y для даної задачі визначаємо також за виразом (18).

Як і для балки за рис. 2, для балки за рис. 4 маємо три ділянки з внутрішніми зусиллями M і Q :

$$M_1(x) = -q \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} \cdot q_0 \cdot \frac{x^3}{a};$$

$$Q_1(x) = \frac{q_0}{2 \cdot a} \cdot x^2 - q \cdot x;$$

$$\frac{d^2 M_1(x)}{dx^2} = \frac{dQ_1(x)}{dx} = \frac{q_0}{a} \cdot x - q; \quad 0 \leq x \leq a; \quad (23)$$

$$M_2(x) = -q \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{a}{2} \cdot q_0 \cdot \left(x - \frac{2}{3} \cdot a\right);$$

$$Q_2(x) = -q \cdot x + q_0 \cdot \frac{a}{2}; \quad a \leq x \leq l - a;$$

$$\frac{d^2 M_2(x)}{dx^2} = \frac{dQ_2(x)}{dx} = -q; \quad (24)$$

$$M_3(x) = \frac{q_0}{6 \cdot a} \cdot (l - x)^3 - \frac{q}{2} \cdot (l - x)^2;$$

$$Q_3(x) = -\frac{q_0}{2 \cdot a} \cdot (l - x)^2 + q \cdot (l - x);$$

$$\frac{d^2 M_3(x)}{dx^2} = \frac{dQ_3(x)}{dx} = \frac{q_0}{a} \cdot (l - x) - q; \quad a \leq x \leq l - a; \quad (25)$$

Тут $q_0 = (q \cdot l)/a$. (26)

На рис. 5 приведені результати чисельного розрахунку балки.

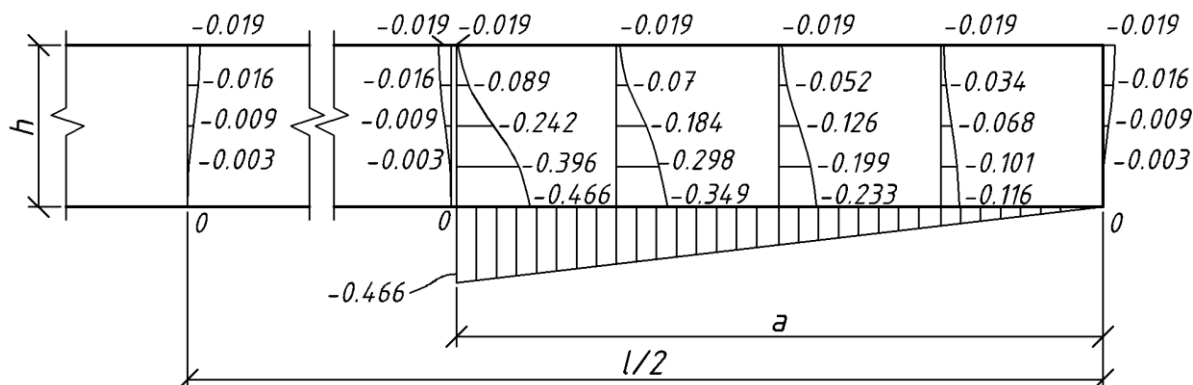


Рис. 5. Розподіл напружень σ_y по площі опори (ділянка довжиною a) та між опорами.

На відміну від балки на рис. 3, в даному випадку реактивні напруження σ_y змінюються по довжині опорних ділянок лінійно. При цьому, максимальні напруження σ_y в даному випадку вже не задовольняють умові міцності за зім'яттям: $\sigma_y = R_{зм,90} = 0,466 \text{ кН/см}^2 > R_{зм,90,*} = 0,3 \text{ кН/см}^2$.

Висновки за результатами досліджень. В роботі наведено методику аналітичного визначення дотичних τ_{xy} та поперечних нормальних σ_y напружень шляхом безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги плоскої задачі теорії пружності.

На прикладах розрахунку дерев'яної балки з різними розподілами її реакцій по довжині опорних ділянок показано відмінність характеру розподілу поперечних нормальних σ_y в балках, а саме: він є однаковим на середній ділянці балки (між опорами) і є різним на опорних ділянках.

Розподіли реакцій балки у вигляді трикутників на опорних ділянках викликають напруження σ_y , що змінюються по довжині опорних ділянок лінійно. При цьому, максимальні напруження σ_y в даному випадку, на відміну від попереднього (з рівномірним розподілом реакцій) вже не задовольняють умові міцності за зім'яттям.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Серов Е.Н., Санников Ю.Д., Серов А.Е. Проектирование деревянных конструкций: учеб. Пособие / Под ред. Е.Н. Серова. М.: Изд-во АСВ, 2011. 536 с.
2. Арленинов Д.К., Буслаев Ю.Н., Игнатьев В.П., Романов П.Г., Чахов Д.К. Конструкции из дерева и пластмасс: учеб. для техн. вузов. М.: Изд-во АСВ, 2002. 280 с.
3. Гаппоев М.М., Гуськов И.М., Ермоленко Л.К., Линьков В.И., Серова Е.Т., Степанов Б.А., Филлимонов Э.В. Конструкции из дерева и пластмасс: учебник. М.: Изд-во АСВ, 2004. 440 с.
4. Гринь И.М., Джан-Темиров К.Е., Гринь В.И. Строительные конструкции из дерева и синтетических материалов. Киев: Вища школа, 1990. 221 с.
5. Зубарев Г.Н., Бойтемиров Ф.А., Головина В.М., Ковликов В.И., Удицкая Э.М. Конструкции из дерева и пластмасс: учеб.

REFERENCES:

1. Serov E.N., Sannikov Yu.D., Serov A.E. Proektirovanie derevyannykh konstruktсий: ucheb. posobie / Pod red. E.N. Serova. M.: Izd-vo ASV, 2011. 536 s.
2. Arleninov D.K., Buslaev Yu.N., Ignatev V.P., Romanov P.G., Chahov D.K. Konstruktsii iz dereva i plastmass: ucheb. dlya tehn. vuzov. M.: Izd-vo ASV, 2002. 280 s.
3. Gappoev M.M., Guskov I.M., Ermolenko L.K., Linkov V.I., Serova E.T., Stepanov B.A., Filimonov E.V. Konstruktsii iz dereva i plastmass: uchebnik. M.: Izd-vo ASV, 2004. 440 s.
4. Grin I.M., Dzhan-Temirov K.E., Grin V.I. Stroitelnyie konstruktsii iz dereva i sinteticheskikh materialov. Kiev: Vischa shkola, 1990. 221 s.
5. Zubarev G.N., Boytemirov F.A., Golovina V.M., Kovlikov V.I., Uditskaya E.M. Konstruktsii iz dereva i plastmass: ucheb. Posobie / pod. red. Yu.M. Hromtsa. M.: Izdatelskiy tsentr «Akademiya», 2004. 304 s.

- Пособие. / под ред. Ю.М. Хромца. М.: Издательский центр «Академия», 2004. 304 с.
6. Иванов В.А., Клименко В.З. Конструкции из дерева и пластмасс. Киев: Вища школа, 1983. 279 с.
 7. Бойтемиров Ф.А., Головина В.М., Улицкая Э.М. Расчет конструкций из дерева и пластмасс: учеб. Пособие / Под ред. Ф.А. Бойтемирова. М.: Издательский центр «Академия», 2006. 160 с.
 8. Дмитриев П.А. Деревянные балки и балочные клетки: учеб. пособие. Новосибирск: ППО «Печать», 1989. 161 с.
 9. Калугин А.В. Деревянные конструкции: учеб. пособие. М.: Изд-во АСВ, 2003. 224 с.
 10. Гомон С.С. Конструкції із дерева та пластмас. Практикум. Навчальний посібник. Рівне: НУВГП, 2012. 154 с.
 11. СНиП II-25-80 Деревянные конструкции. М.: Стройиздат, 1980. 43 с.
 12. СП 64.13330.2017. СНиП II-25-80 Деревянные конструкции. М.: 2017. 97 с.
 13. ДБН В.2.6-161:2017 Дерев'яні конструкції. Основні положення. Київ: Мінрегіон України, 2017. 111 с.
 14. Перетятко Ю.Г. Конспект лекций по курсу «Конструкции из дерева и пластмасс». Раздел: «Древесина-конструкционный материал». Харьков: ХИСИ, 1993. 120 с.
 15. Перетятко Ю.Г., Ляшенко І.Ю. Компонування ефективного перерізу двотаврової балки. Науковий вісник будівництва. Харків: ХНУБА, 2021. Т.103. № 1. С. 155-162.
 6. Ivanov V.A., Klimenko V.Z. Konstruktsii iz dereva i plastmass. Kiev: Vischa shkola, 1983. 279 s.
 7. Boytemirov F.A., Golovina V.M., Ulitskaya E.M. / Pod red. F.A. Boytemirova. Raschet konstruktsiy iz dereva i plastmass: ucheb. posobie. M.: Izdatelskiy tsentr «Akademiya», 2006. 160 s.
 8. Dmitriev P.A. Derevyannyye balki i balochnyie kletki: ucheb. posobie. Novosibirsk: PPO «Pechat», 1989. 161 s.
 9. Kalugin A.V. Derevyannyye konstruktsii: ucheb. posobie. M.: Izd-vo ASV, 2003. 224 s.
 10. Homon S.S. Konstruktsii iz dereva ta plastmas. Praktikum. Navchalnyi posibnyk. Rivne: NUVHP, 2012. 154 s.
 11. SNiP II-25-80 Derevyannyye konstruktsii. M.: Stroyizdat, 1980. 43 s.
 12. SP 64.13330.2017. SNiP II-25-80 Derevyannyye konstruktsii.M.: 2017. 97 s.
 13. DBN V.2.6-161:2017 Derevani konstruktsii. Osnovni polozhennia. Kyiv: Minrehion Ukrainy, 2017. 111 s.
 14. Peretyatko Yu.G. Konspekt lektsiy po kursu «Konstruktsii iz dereva i plastmass». Razdel: «Drevesina-konstruktsionnyiy material». Kharkov: KhISI, 1993. 120 s.
 15. Peretiatko Yu.G., Liashenko I.Yu. Komponuvannya efektyvnoho pererizu dvotavrovoi balky. Naukovyi visnyk budivnytstva. Kharkiv: KhNUBA, 2021. T.103, № 1. S. 155-162.

Peretyatko Yu.G., Aheyenko S.B., Lyashenko I.Yu. INFLUENCE OF THE TYPE OF SUPPORT REACTIONS TO CRUMPLING WOODEN BEAMS ON THE SUPPORTS. The work is devoted to the study of the nature of the distribution of normal stresses across the fibers on the support areas of wooden beams with a rectangular cross-section. A technique has been developed for the analytical determination of tangential and transverse normal stresses in a beam by direct integration of the equilibrium equations of the plane problem of the theory of elasticity. Two cases of distribution of support reactions of a beam on two supports are considered: uniform and in the form of triangles along the length of the support sections of the beam. The results of numerical calculations are presented. It is shown that, in addition to fulfilling the conditions for the strength of the beam with the maximum normal stresses along the fibers and tangents on the supports according to the Zhuravsky formula, it is necessary to fulfill the condition for the strength of the supporting part of the beam to crumpling across the fibers. The latter depends on the cases of the distribution of the support reactions of the beam.

Keywords: wooden beam, rectangular cross section, definitions of normal and tangential stresses, equilibrium equations for the plane problem of the theory of elasticity, types of distribution of support reactions of a beam, crumpling of a beam on a support across the fibers.